Expériences fondamentales

Expériences fondamentales

Pour tout ce que nous apprenons, nous nous fions à des expériences antérieures pour nous aider à comprendre, à associer et à se rappeler des concepts et des compétences. Lorsque des expériences fondamentales précèdent l'enseignement formel d'un sujet de mathématiques, les élèves peuvent recourir à leur mémoire pour accéder à ces expériences afin de comprendre les idées mathématiques qui sous-tendent la terminologie, les symboles et l'arithmétique formels.

Lors de l'enseignement des expériences fondamentales, les élèves ont l'occasion de raisonner, de résoudre des problèmes, d'estimer, de visualiser, de communiquer, d'utiliser de la technologie et d'établir des liens entre des idées, c'est-à-dire de faire l'expérience des mathématiques par l'entremise des sept processus mathématiques du programme d'études. Les expériences fondamentales doivent être accessibles et attrayantes, et elles devraient susciter et maintenir l'engagement au fil du temps.

Il se peut que les élèves ne s'intéressent pas toujours aux concepts et aux compétences mathématiques, mais ils sont plus susceptibles d'être intéressés lorsqu'ils s'y engagent activement. Si les élèves estiment qu'il vaut la peine de parler de l'expérience (p. ex., avec leurs pairs, leur enseignant et d'autres), ils démontrent alors leur intérêt tout en renforçant leur compréhension fondamentale du contenu.

La régularité au service du calcul mental

L'objectif du style de questions qui repose sur les régularités est de faire en sorte que les élèves remarquent des régularités lorsqu'ils font une série de problèmes de calcul mental que l'enseignant a soigneusement sélectionnés et séquencés. Les régularités peuvent constituer de la pratique pour certains élèves et des expériences fondamentales pour d'autres, selon le type de questions de calcul mental et l'expérience antérieure des élèves. Ce type de calcul mental se prête à l'exploration d'une variété de sujets arithmétiques et algébriques. Un enseignant expérimenté reconnaîtra les sujets pour lesquels ce format serait utile aux élèves.

Le processus commence par la remise d'un modèle vierge aux élèves. Un tel modèle figure à la page 18. L'enseignant donne de vive voix des problèmes de calcul mental que les élèves écrivent et résolvent dans les espaces du modèle. Les trois premiers groupes de questions sont préparés à l'avance et donnés de vive voix par l'enseignant aux élèves. Le quatrième groupe du modèle est réservé aux élèves afin qu'ils utilisent la régularité qu'ils remarquent dans les trois premiers groupes de questions, et qu'ils préparent ensuite leurs propres questions et solutions aux parties a) à d). Le quatrième groupe permettra aux élèves d'utiliser et de vérifier la régularité.

Chasse aux carrés radicaux

Cette expérience tente de faire en sorte que les élèves utilisent les aires de carrés pour explorer les nombres irrationnels en tant qu'appui pour le résultat d'apprentissage A2 du cours IMAP10. Il s'agira d'une expérience fondamentale pour les élèves apprenant les nombres irrationnels (radicaux) et leurs représentations. Pour ceux dont les racines carrées sont familières, l'expérience constituera une occasion de consolider et d'associer leur connaissance de l'aire des carrés et des représentations des nombres radicaux.

Croissance et décroissance exponentielles

Cette section tente de décrire les expériences fondamentales visuelles et tactiles des élèves qui leur permettent d'explorer et d'expérimenter les puissances et la croissance exponentielle en tant qu'appui pour le résultat A3 du cours IMAP10. Quelques élèves auront peut-être vécu certaines de ces expériences fondamentales en 9^{e} année dans le cadre de leur travail sur des puissances à bases entières (résultats d'apprentissage 9.N.1 et 9.N.2). Ces expériences seront fondamentales au développement de leur compréhension des puissances et de la croissance exponentielle (ou de la décroissance).

La régularité au service du calcul mental

À l'appui du domaine :	*Algèbre et nombre*
Apprentissage préalable pour :	*Comprendre les facteurs communs et les facteurs trinomiaux*

1. La série de questions suivante appuie le résultat A5 du cours IMAP10. Les questions tentent d'aider les élèves à mieux comprendre la mise en facteurs d'une différence de carrés tout en faisant délibérément du calcul mental. Un élève aurait créé le modèle rempli (ci-dessous) après avoir reçu des instructions verbales de l'enseignant, telles que :

   « À la section 1a, écrivez l'expression « 5 moins 1 » ainsi que son résultat. »

   « À la section 1b, écrivez l'expression « 5 plus 1 » ainsi que son résultat. »

   « À la section 1c, écrivez l'expression qui correspond au produit des réponses de 1a et de 1b. »

   « À la section 1d, écrivez l'expression « 5 au carré moins 1 au carré » ainsi que son résultat. »

   « À la section 2a, écrivez l'expression « 10 moins 1 » ainsi que son résultat. »

   « À la section 2b, écrivez l'expression « 10 plus 1 » ainsi que son résultat. »

   « À la section 2c, écrivez l'expression qui correspond au produit des réponses de 2a et de 2b. »

   « À la section 2d, écrivez l'expression « 10 au carré moins 1 au carré » ainsi que son résultat. »

   « À la section 3a, écrivez l'expression « –5 moins 1 » ainsi que son résultat. »

   « À la section 3b, écrivez l'expression « –5 plus 1 » ainsi que son résultat. »

   « À la section 3c, écrivez l'expression qui correspond au produit des réponses de 3a et de 3b. »

   « À la section 3d, écrivez l'expression « –5 au carré moins 1 au carré » ainsi que son résultat. »

   « À la section 4, en utilisant la régularité des questions 1, 2 et 3 ci-dessus, créez vos propres questions. »

   « Que remarquez-vous? Quelles questions vous posez-vous? Écrivez trois observations dans les espaces au bas de la page. Comparez vos observations avec celles de votre voisin. »

La régularité au service du calcul mental

Date Lundi, 8 mars 2021

Nom Pat

1a $5 - 1 = 4$	2a $10 - 1 = 9$
1b $5 + 1 = 6$	2b $10 + 1 = 11$
1c $4 \times 6 = 24$	2c $9 \times 11 = 99$
1d $5^2 - 1^2 = 24$	2d $10^2 - 1^2 = 99$

3a $-5 - 1 = -6$	4a $2 - 1 = 1$
3b $-5 + 1 = -4$	4b $2 + 1 = 3$
3c $(-6)(-4) = 24$	4c $1 \times 3 = 3$
3d $(-5)^2 - 1^2 = 24$	4d $2^2 - 1^2 = 3$

Le produit de la différence et de la somme de deux nombres a la même valeur que la différence de leurs carrés.
La régularité fonctionne lorsque tu ajoutes et soustrais 1 même lorsque tu commences par un nombre négatif.
Pourrais-je ajouter ou soustraire quelque chose d'autre que 1 et maintenir toujours la régularité?

Ceci peut représenter une expérience fondamentale pour les élèves qui n'ont pas encore compris l'algèbre formelle en tant qu'arithmétique généralisée. Cette expérience peut les aider à formuler une règle générale. Pour les élèves ayant de l'expérience en algèbre, l'enseignant peut poser la question suivante à la classe (ou à quelques élèves) : « Pouvez-vous montrer que la régularité fonctionne pour tous les cas, d'une façon générale? »

En guise de prochaine étape, on pourrait demander aux élèves de fabriquer un carré de 5 unités sur 5 unités (à l'aide de tuiles, de papier graphique, etc.) et d'en soustraire un carré de taille 1 unité sur 1 unité. Ils devraient démontrer (en réorganisant les pièces) et expliquer pourquoi, lorsque le carré est soustrait, l'aire est la même que celle d'un rectangle de 4 unités sur 6 unités.

La régularité au service du calcul mental

À l'appui du domaine :	*Algèbre et nombre*
Apprentissage préalable pour :	*Multiplication des expressions polynomiales de façon concrète, imagée et symbolique*

2. La série de questions suivante appuie le résultat A4 du cours IMAP10 en associant une compréhension de la distributivité à la multiplication des expressions polynomiales par l'entremise du calcul mental. Un enseignant pourrait commencer par les instructions orales suivantes pour explorer une autre régularité tout en faisant du calcul mental.

   « À la section 1a, écrivez l'expression « 7 plus 1 » ainsi que son résultat. »

   « À la section 1b, écrivez l'expression « 7 fois la réponse de a » ainsi que son résultat. »

   « À la section 1c, écrivez l'expression qui correspond au produit de « 7 fois 7 » ainsi que son résultat. »

   « À la section 1d, écrivez l'expression qui correspond à la somme de 7 et de la réponse de 1c. ainsi que son résultat. »

   « À la section 2a, écrivez l'expression « 6 plus 1 » ainsi que son résultat. »

   « À la section 2b, écrivez l'expression « 6 fois la réponse de 2a » ainsi que son résultat. »

   « À la section 2c, écrivez l'expression qui correspond au produit de « 6 fois 6 » ainsi que son résultat. »

   « À la section 2d, écrivez l'expression qui correspond à la somme de 6 et de la réponse de 2c. ainsi que son résultat. »

   Comme dans la première expérience, les instructions et la régularité passeraient par les questions du groupe 3 posées par l'enseignant et les questions du groupe 4, où les élèves utilisent la structure de la régularité pour formuler leurs propres questions. Cela est suivi de trois observations ou questions. Cet exemple pourrait aider certains élèves à explorer et à articuler la propriété de la distributivité.

La régularité au service du calcul mental Date____________________________

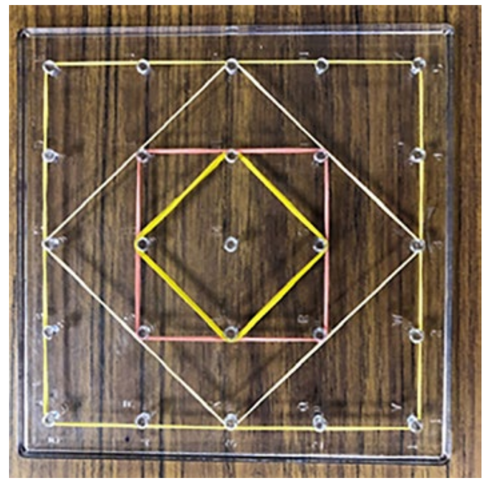
Nom____________________________

1a	2a
1b	2b
1c	2c
1d	2d

3a	4a
3b	4b
3c	4c
3d	4d

Chasse aux carrés radicaux

À l'appui du domaine :	*Algèbre et nombre*
Apprentissage préalable pour :	*Comprendre les nombres irrationnels : représenter, identifier, simplifier, ordonner*



Vous pouvez demander aux élèves d'utiliser des géoplans et des élastiques pour créer divers carrés où le plus petit carré sur le géoplan (1 sur 1) représente une aire de 1 unité carrée. Vous pouvez aussi utiliser du papier à points où le plus petit carré (1 cm sur 1 cm ou possiblement $\frac{1}{4}$ po sur $\frac{1}{4}$ po) représente une aire de 1 unité. Travaillez tout d'abord avec une grille de papier à points de 4 sur 4 ou d'un géoplan (voir la page 23).

Posez aux élèves la question suivante : « Quelles aires exprimées en nombres entiers pouvez-vous représenter en créant des carrés sur le géoplan (ou du papier à points avec des sommets aux points d'intersection)? »

Au fur et à mesure que des carrés de tailles différentes sont créés, encouragez les élèves à compter les aires du géoplan en indiquant du doigt chaque aire d'une (1) unité carrée. Les élèves devraient écrire l'énoncé de multiplication « longueur fois largeur égale aire » d'une façon qui leur est significative. Par exemple, les élèves pourraient écrire ce qui suit :

Pour le grand carré jaune ci-dessus $4 \times 4 = 16$; $\sqrt{16} \times \sqrt{16} = 16$

Pour le carré brun clair ci-dessus $\sqrt{8} \times \sqrt{8} = 8$; $2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 8$

Au début, les élèves ne peuvent créer que des carrés ayant des aires de 1, 4, 9 et 16 unités carrées avec un géoplan. Dans ce cas, demandez aux élèves quelles autres aires exprimées en nombres entiers peuvent être représentées par des carrés sur le géoplan. Ou posez la question suivante : « Est-il possible de créer un carré avec une aire de 8 unités carrées? » Certains élèves commenceront probablement à créer des carrés dont les côtés sont des droites obliques (plutôt que verticales et horizontales). Au besoin, demandez aux élèves de dessiner la diagonale du carré ayant une aire de 4 unités carrées pour les amener à considérer des longueurs autres que horizontales et verticales. L'enseignant devra être attentif à ce que les élèves disent et à ce qu'ils essaient afin de déterminer la prochaine bonne question à poser pour approfondir leur réflexion. Remarque : Sur une grille de 4 sur 4, les carrés qui peuvent être créés comportent une aire exprimée en nombres entiers de 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10 et 16 unités carrées. Il n'est pas nécessaire que tous les élèves déterminent toutes ces aires.

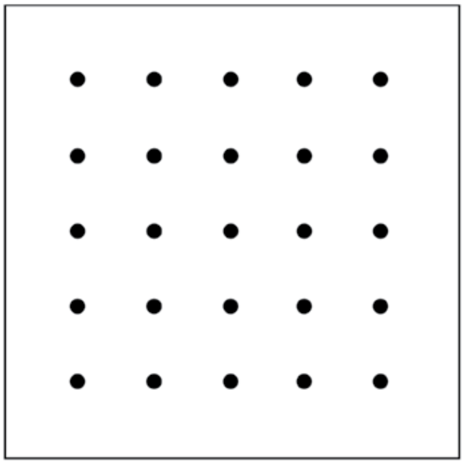
Les enseignants peuvent aider les élèves à tirer parti de leurs expériences fondamentales dans le cadre de l'activité susmentionnée. Voici un exemple pour le résultat 10I.A.2 : « Démontrer une compréhension du nombre irrationnel en représentant, identifiant et simplifiant des nombres irrationnels; en ordonnant des nombres irrationnels. » En faisant référence aux expériences fondamentales des élèves avec la chasse aux carrés radicaux, les enseignants peuvent aider les élèves à établir des liens entre leur compréhension du théorème de Pythagore aux mathématiques du nouveau résultat d'apprentissage.

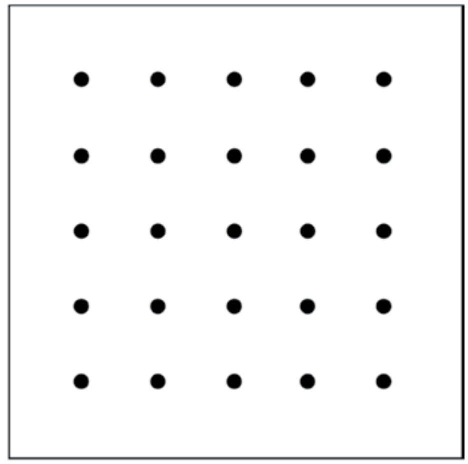
À titre de prochaine étape, les élèves pourraient utiliser le théorème de Pythagore pour explorer la relation entre les aires et les longueurs de côté des carrés qu'ils ont créés. On pourrait leur demander de comparer les longueurs de côté des carrés aux aires de 2 et de 8. Pour plus d'exemples, les élèves pourraient utiliser du papier à points pour travailler avec une plus grande grille, disons de 5 sur 5. On pourrait alors poser les questions : « Est-il possible de créer un carré ayant une aire de 18 unités carrées? » [Note : Des carrés d'une aire de 13, 17 et 25 unités carrées sont également possibles.] « Que remarques-tu lorsque tu compares les longueurs de côté des carrés aux aires de 2, de 8 et de 18 unités carrées? » « Imagine une grille encore plus grande. Pourrait-on y trouver d'autres carrés qui pourraient être reliés? »

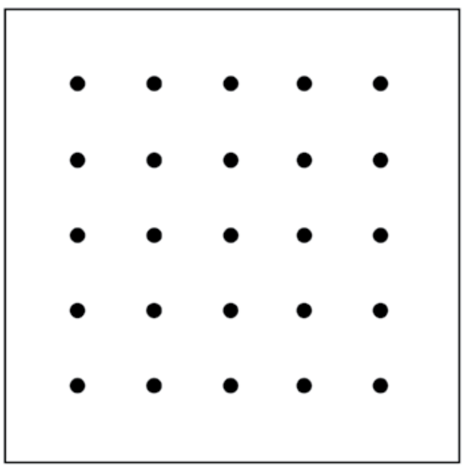
La prochaine étape consisterait à demander aux élèves de noter des relations entre certaines longueurs de côté de carrés, y réfléchir, puis les décrire (C'est-à-dire qu'un carré ayant une aire de 2 unités carrées a une longueur de côté de $\sqrt{2}$ unités; un carré ayant une aire de 8 unités carrées a une longueur de côté de $\sqrt{8}$ unités, qui est de la même longueur que $2\sqrt{2}$ ou trois fois la longueur de côté du carré ayant une longueur de côté de $\sqrt{2}$ unités.) De même, un carré ayant une aire de 18 unités carrées a une longueur de côté de $\sqrt{18}$ unités, qui est la même longueur que $3\sqrt{2}$ unités. (C'est-à-dire, trois fois la longueur de côté d'un carré de côté de $\sqrt{2}$.) Ils pourraient remarquer la régularité $1\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$ et se demander quelle serait l'aire du prochain carré de cette régularité. Ils pourraient se demander quelles autres aires carrées peuvent être ainsi reliées ou si $\sqrt{5}$ et $\sqrt{20}$ ont ce même rapport. Avec de l'encouragement, les élèves peuvent s'interroger sur ces relations et les exprimer en collaborant entre eux.

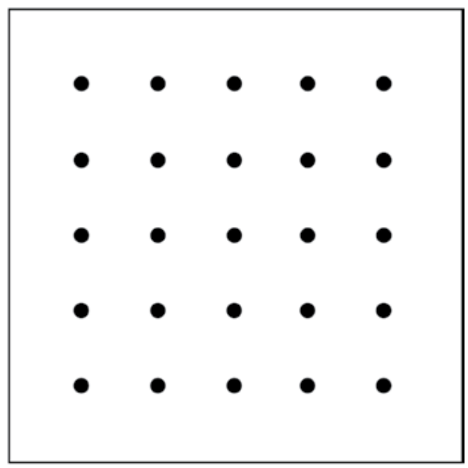
Cette fiche permet aux élèves de faire le suivi de leur travail avec des élastiques sur un géoplan.

Chasse aux carrés radicaux









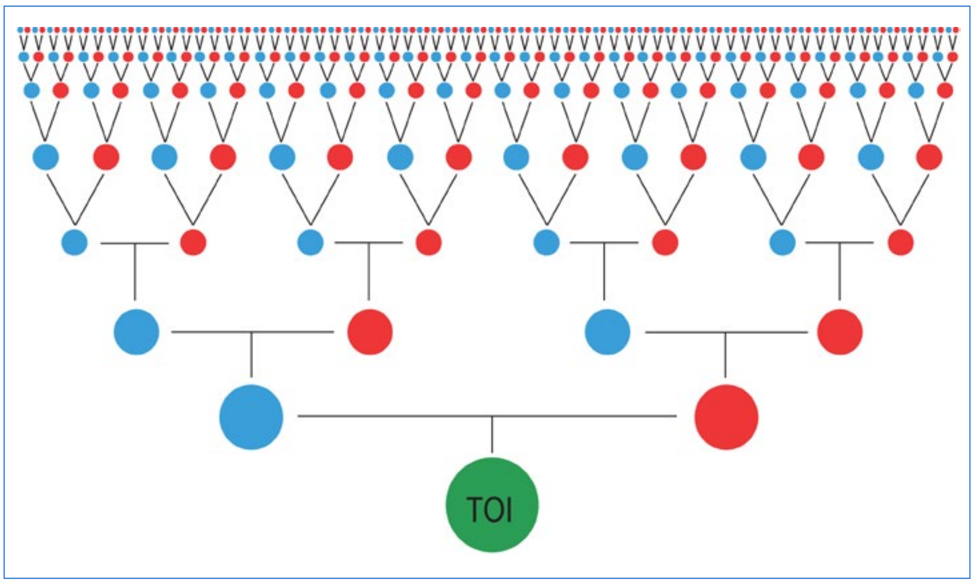
Croissance et décroissance exponentielles

À l'appui du domaine :	*Algèbre et nombre*
Apprentissage préalable pour :	*Démontrer une compréhension des puissances ayant des exposants entiers et rationnels*

Les élèves peuvent vivre ces expériences fondamentales avec le concept des puissances sans se fier à des représentations symboliques formelles des puissances; ces activités peuvent précéder l'enseignement formel du sujet.

La liste d'expériences suivante approfondit chez les élèves la compréhension des puissances et de la croissance exponentielle.

1. **Arbre généalogique :** Combien d'ancêtres directs avais-tu lorsque le Traité nº 1 a été signé en 1871? Combien d'ancêtres avais-tu lorsque Christophe Colomb a accosté sur la côte est de l'Amérique du Nord? Combien d'ancêtres directs vivants as-tu aujourd'hui? Comment peux-tu représenter les régularités de ton ascendance avec des objets? …avec des dessins? ...avec des nombres? …avec des mots?



2. **Ventes de shampooing :** Dans les années 1980, des publicités pour une entreprise de shampooing ont utilisé le concept du doublement pour montrer à quel point une bonne idée peut être diffusée rapidement. Après avoir essayé le shampooing, la modèle a dit : « J'ai parlé à deux amies et elles ont parlé à deux amies, qui, à leur tour, ont fait de même encore, et encore, et encore. » Avec chaque niveau de communication à deux amies, le nombre d'images de la modèle double. Selon toi, quel nombre d'images seraient à prévoir dans la publicité à chaque étape successive? À quel moment l'affichage des images devient-il irréalisable? Comment peux-tu mieux représenter la gamme d'images afin de montrer plusieurs itérations? Qu'est-ce que cette régularité suggère au sujet du pouvoir de la communication en ligne?

   Voici l'une des nombreuses variantes de l'annonce : www.youtube.com/watch?v=brC_jK6stBs (CTB) (en anglais seulement).

3. **Virus Ebola :** Dans le tableau ci-dessous, quelles sections reflètent une régularité où la contagion double? Quelles questions de doublement pourrais-tu explorer si le doublement mensuel des nouveaux cas modélisait la propagation du virus Ebola? Quels renseignements sur cette maladie et son traitement pourraient t'aider dans ta réflexion?

Ebola en Guinée, au Libéria et au Sierra Leone*		
Date (mois)	**Nouveaux cas par mois**	**Décès par mois (40 %)**
2014-03-31	120	48
2014-04-30	114	45
2014-05-31	75	30
2014-06-30	290	116
2014-07-31	723	289
2014-08-31	1730	692
2014-09-30	3501	1400
2014-10-31	6987	2794

* Données tirées de CDC, https://www.cdc.gov/vhf/ebola/history/2014-2016-outbreak/cumulative-cases-graphs.html (en anglais seulement)

4. **Droite numérique :** Crée une droite numérique sur une bande de papier, en comptant par centimètres. Utilise du papier centimétré pour découper des longueurs ou des rectangles, doublant chaque fois leur longueur. Fixe les pièces découpées à la droite numérique. Décris la régularité. Décris la longueur de la droite numérique dont tu aurais besoin pour continuer.

5. **Tableau de 100 :** Commence par une photocopie d'un tableau de 100 où paraissent les nombres et aie à portée de main quelques copies de tableaux de 100 vides (sans nombres). Colle des carrés de papier coloré sur le tableau de 100 pour montrer les emplacements des nombres qui doublent {1, 2, 4, 8, …}. Essaie d'en montrer environ dix. Lors de cette activité, décris ce que tu penses tandis que tu saisis la puissance du doublement.

6. **Grimper l'échelle du doublement :** Demandez aux élèves de créer une échelle de doublement sous forme de tableau de valeurs (voir ci-dessous). Lorsqu'on compte par un, on peut commencer à zéro; cependant lorsqu'on double des nombres, on commence à un. Les élèves remarqueront que doubler à partir de zéro n'est pas très intéressant. Outre les élèves qui manifestent de l'intérêt et qui sont prêts à en poursuivre l'exploration, on s'attend à ce que les élèves grimpent l'échelle de doublement en commençant par la valeur initiale, au sol, à l'échelon 0. Une échelle comportant de cinq à huit échelons suffit habituellement pour permettre aux élèves de créer des images mentales des échelons qui vont au-delà de ce qu'ils ont écrit dans leur tableau.

Échelons	Doublement de la valeur
...	...
3	8 = 1 x 2 x 2 x 2
2	4 = 1 x 2 x 2
1	2 = 1 x 2
valeur initiale	1
...	...

Demandez à chacun des élèves de créer un tableau comme celui qui paraît ci-dessus et de remplir les échelons et les valeurs doublées au-dessus de la valeur initiale.

Pour chacune des tâches suivantes, en groupes de 2 ou 3 élèves, demandez-leur de grimper et de descendre les échelons de l'échelle de doublement tout en tenant compte de la valeur qui double.

A. À partir du sol, grimpez 4 échelons.
   - Quelle est la valeur doublée?
   - Grimpez 8 échelons. Quelle est la valeur doublée?
   - Combien d'échelons devez-vous grimper avant d'atteindre un nombre à 3 chiffres? Quelle est sa valeur?
   - Combien d'échelons devez-vous grimper avant d'atteindre un nombre à 4 chiffres? Quelle est sa valeur?

B. Du sol, grimpez 3 échelons.
   - De l'échelon 1 et grimpez 3 échelons.
   - De l'échelon 3 et grimpez 3 échelons.
   - Décrivez et expliquez les régularités que vous remarquez.

C. De l'échelon 4, descendez 3 échelons (Notez la valeur de départ et la valeur d'arrivée qui en résultent).
   - De l'échelon 4, descendez 3 échelons.
   - De l'échelon 10, descendez 3 échelons.
   - De l'échelon 5, descendez 3 échelons.
   - Décrivez et expliquez les régularités que vous remarquez.

D. De l’échelon 3, grimpez, grimpez, puis descendez, descendez, descendez.

- De n’importe quel échelon, grimpez, grimpez, puis descendez, descendez, descendez.
- Décrivez et expliquez les régularités que vous remarquez.

Après chaque section de tâches, les élèves devraient avoir l’occasion de partager avec le groupe les régularités qu’ils remarquent. Les enseignants peuvent demander à certains groupes de discuter avec d’autres, au besoin, pour s’assurer que tous les élèves ont l’occasion de voir les régularités se développer. Après l’expérience, il vaut la peine de faire une récapitulation avec la classe entière afin de faire valoir ce que les élèves ont remarqué en général et les questions qu’ils se sont posés. Voici quelques exemples de prolongement et de questions possibles après cette expérience :*

« Quelles sont les valeurs doubles si les échelons de l’échelle se trouvent sous le niveau du sol? »

« Quels nombres apparaissent s’il s’agit d’une échelle de triplement au lieu d’une échelle de doublement? »

7. **Rester sur l’échelle du doublement :** Cette expérience vise à aider les élèves à se faire une bonne idée des nombres sur l’échelle de doublement et des interactions entre les puissances et les quatre opérations de base. Demandez à chacun des élèves de créer un tableau, comme celui qui parait ci-dessous, et de remplir les échelons et les valeurs doublées au-dessus de la valeur de départ. Les élèves peuvent également utiliser une échelle de doublement qu’ils ont créée au préalable.

Échelons	Doublement de la valeur
...	...
3	8 = 1 x 2 x 2 x 2
2	4 = 1 x 2 x 2
1	2 = 1 x 2
valeur initiale	1
...	...

* Les articles suivants décrivent la participation des enseignants et des élèves manitobains à ces activités :

Slivinski, Peter, Steven Erickson et Ralph T. Mason. « Mathematics 9: Designing Foundational Experiences for the Hardest Topics. » *MERN Journal*, vol. 11, 2015, pp. 50 à 57.

Mason, Ralph T. et Steven Erickson. « Foundational Experiences for Secondary Mathematics: A New Approach to Curriculum? » *MERN Journal*, vol. 11, 2015, pp. 17–20.

On pourrait demander aux élèves de travailler en groupes de 2 ou 3 pendant qu'ils accomplissent les tâches suivantes :

> Choisissez deux nombres sur l'échelle. Déterminez si vous pouvez effectuer l'opération (séparément) et obtenir un résultat qui correspond également à un nombre sur l'échelle de doublement. Est-ce toujours vrai? Parfois? Dans ce cas, dans quelles circonstances?
>
> - Additionnez-les.
> - Soustrayez-les.
> - Multipliez-les.
> - Divisez-les.

Faites avec les élèves une récapitulation des régularités qu'ils voient. Il est possible qu'ils demandent s'ils peuvent choisir le même nombre deux fois (comme dans 4 + 4). Vous pouvez choisir d'encourager de telles explorations.

8. **Dédoublement sur l'échelle du doublement :** Les élèves peuvent, à partir de rectangles faits de papier centimétré, représenter les valeurs sur l'échelle de doublement, jusqu'à 64. En commençant par 64, amenez-les à dédoubler à l'aide de plis ou de découpures. Lorsqu'ils arrivent à un rectangle ayant une aire de 1 unité carrée, le dédoublement donnera des valeurs sous la valeur de départ. À mesure qu'ils progressent, demandez aux élèves d'inscrire ces nombres dédoublés sur leur échelle. Pour aider les élèves à visualiser les résultats du dédoublement, invitez-les à découper une « valeur de départ amplifiée », un carré dix sur dix pour représenter une valeur de 1. Avec la valeur de départ amplifiée, les élèves peuvent faire des représentations fractionnaires et décimales pour plusieurs niveaux de l'échelle de doublement sous le niveau de la valeur de départ de 1.

   Extension : Répétez l'activité avec une nouvelle valeur de départ. Les observations et les descriptions des régularités tiennent-elles toujours? Pourquoi ou pourquoi pas?