Unité D
Exposants et logarithmes

EXPOSANTS ET LOGARITHMES

Dans l'unité qui suit, les élèves :

- tracent le graphique de fonctions exponentielles et de leurs transformations et déterminent leurs propriétés;
- apprennent à passer de la forme exponentielle à la forme logarithmique, et vice-versa;
- tracent le graphique de fonctions logarithmiques décimales et de leurs transformations, et déterminent leurs propriétés;
- démontrent les théorèmes des logarithmes et les appliquent à des problèmes d'algèbre;
- utilisent des théorèmes de changement de base pour résoudre des problèmes;
- résolvent des équations exponentielles et logarithmiques et les vérifient;
- étudient la fonction exponentielle naturelle et ses propriétés;
- tracent le graphique de fonctions logarithmiques naturelles et de leurs transformations;
- résolvent des équations exponentielles et logarithmiques naturelles;
- modélisent et appliquent des fonctions exponentielles et logarithmiques pour résoudre des problèmes.

Méthodes pédagogiques

Les enseignants devraient mettre en œuvre les méthodes pédagogiques proposées ici pour favoriser l'apprentissage des élèves et leur permettre notamment :

- d'utiliser une calculatrice à affichage graphique ou un logiciel graphique pour étudier les graphiques exponentiels et logarithmiques et pour en déterminer les propriétés;
- d'établir des liens entre les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmiques;
- de travailler avec des logarithmes de bases différentes;
- de trouver des techniques qui leur permettront de résoudre des équations comprenant des exposants et des logarithmes;
- de modéliser et d'appliquer des logarithmes à des problèmes donnés dans les activités en classe;
- d'effectuer des activités appropriées sur papier;
- d'effectuer des activités d'enseignement différencié appropriées.

Exercice d'algèbre

À l'aide de questions brèves et simples qui font appel à un « calcul mental » les enseignants pourront réviser les concepts de l'algèbre tels que (voir l'annexe D-1) :

- les exposants rationnels et fractionnaires
- la notation fonctionnelle

Matériel

- calculatrice à affichage graphique ou logiciel graphique
- papier quadrillé

Durée

- 16 heures

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

Résultats d'apprentissage généraux

Représenter et analyser des fonctions exponentielles et logarithmiques à l'aide des outils technologiques appropriés

Résoudre des équations exponentielles, logarithmiques et trigonométriques et des identités

Résultat(s) d'apprentissage spécifique(s)

D-1 tracer le graphique de fonctions exponentielles et les analyser

Communications
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

On trouve à la fin de cette unité des activités d'apprentissage à l'appui de l'enseignement différencié (voir les annexes D-2 à D-8, p. D-58 à D-64).

- **définir une fonction exponentielle**

Définition : La fonction $f(x) = ab^x$, où a et b sont des nombres réels tels que $a \neq 0$, $b > 0$ et $b \neq 1$, est une ***fonction exponentielle***, où
a est une ***constante***
b est une ***base***
x est un ***exposant***

- **tracer le graphique de fonctions exponentielles**

Demandez aux élèves de tracer le graphique de $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$, $y = 3^x$ ou $y = 3^{-x}$, par exemple, sur le même système d'axes. Le recours à des outils technologiques facilitera la visualisation des graphiques.

- **déterminer les propriétés des fonctions exponentielles de la forme $y = ab^x$, où $b > 0$ et $b \neq 1$**

Donnez aux élèves l'occasion d'étudier les propriétés suivantes :
1. le graphique passe par le même point (0, 1) ou l'ordonnée à l'origine est 1;
2. les graphiques n'ont pas d'abscisse à l'origine;
3. le domaine est l'ensemble des nombres réels;
4. l'image est]0, ∞[;
5. $y = 0$ est une asymptote horizontale;
6. la fonction est croissante quand $b > 1$ et elle est décroissante quand $0 < b < 1$;
7. la fonction est biunivoque;
8. la courbe est ouverte vers le haut pour $b > 1$ et $0 < b < 1$.

- **tracer le graphique des transformations de fonctions exponentielles**

Demandez aux élèves de transformer des fonctions exponentielles du type $y = 2^x$, $y = 2^{-x}$, $y = -2^x$, $y = 2^{x-1}$, $y = 2^x - 1$, $y = |2^x - 1|$.

Demandez aux élèves de trouver le domaine, l'image, l'ordonnée à l'origine ainsi que l'équation de l'asymptote de ces transformations.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Inscription au journal

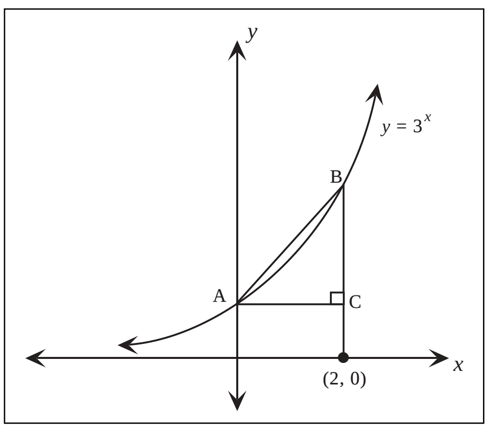
1. Écris une équation exponentielle dont la solution est 3.
2. Donne des exemples de croissance exponentielle.

Problèmes

1. a) Trace le graphique de $y = 2^{|x|}$ à l'aide d'une calculatrice à affichage graphique.
   b) Indique le domaine et l'image.
   c) Donne tes commentaires sur la symétrie.

2. a) Quelle est la période de la fonction $y = 2^{|\cos x|}$?
   b) Trace le graphique de la fonction.

3. Un ΔABC est formé dans le graphique de $y = 3^x$. Trouve l'aire du ΔABC.



NOTES

Ressources imprimées

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Exercices cumulatifs et réponses. Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Solutions des exercices cumulatifs. Supplément au document de mise en œuvre, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2000.

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 4, leçon 1

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-2 résoudre des équations exponentielles dont les bases sont des puissances l'une de l'autre

Communications
Liens
✔ **Estimation et Calcul Mental**
Résolution
✔ **Raisonnement**
Technologie
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **résoudre des équations exponentielles dont les bases sont des puissances l'une de l'autre**

La propriété d'injectivité d'une fonction f biunivoque peut être énoncée comme suit :

Si $f(x_1) = f(x_2)$, alors $x_1 = x_2$.

Autrement dit, étant donné que $f(x_1)$ et $f(x_2)$ ont la même image, il peut y avoir une seule valeur correspondante du domaine; par conséquent, $x_1 = x_2$. Si on pose $f(x) = b^x$, cet énoncé signifie que :

Si $b^{x_1} = b^{x_2}$, alors $x_1 = x_2$.

Quand on trace les graphiques de $f(x) = 2^{3-2x}$ et de $g(x) = 0{,}25^{x-1{,}5}$, on s'aperçoit qu'ils coïncident. Les lois des exposants nous démontrent pourquoi.

$$2^{3-2x} = 0{,}25^{x-1{,}5}$$
$$2^{3-2x} = (2^{-2})^{x-1{,}5}$$
$$2^{3-2x} = 2^{-2x+3}$$

Ainsi, pour résoudre des équations exponentielles, tu peux convertir les bases en puissance de même base et appliquer les lois des exposants.

Exemple

Trouve la valeur de x :

a) $3^{(4x-1)} = 27^{2x}$

b) $(3^x)(27) = 81^{2x+1}$

c) $4^{x+1} = 2^x\sqrt{2}$

d) $(-8)^{\frac{5}{3}} = 2\left(4^{\frac{x}{2}}\right)$

e) $\dfrac{1}{3^{x-1}} = 81$

Solution

a)
$$3^{4x-1} = (3^3)^{2x}$$
$$3^{4x-1} = 3^{6x}$$
$$4x - 1 = 6x$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

b)
$$3^x \cdot 3^3 = (3^4)^{(2x+1)}$$
$$3^{x+3} = 3^{8x+4}$$
$$x + 3 = 8x + 4$$
$$x = \frac{-1}{7}$$

c)
$$(2^2)^{(x+1)} = 2^x\, 2^{\frac{1}{2}}$$
$$2^{2x+2} = 2^{x+\frac{1}{2}}$$
$$4x + 4 = 2x + 1$$
$$x = \frac{-3}{2}$$

d)
$$(-2)^5 = 2 \cdot 2^x$$
$$(-2)^5 = 2^{1+x}$$

∴ pas de solution (côté gauche négatif, côté droit positif)

e)
$$3^{-(x-1)} = 3^4$$
$$-x + 1 = 4$$
$$x = -3$$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul mental

1. Trouve la valeur de x : $8^x = 32$
2. Trouve les deux fonctions équivalentes parmi les fonctions suivantes :
   a) $y = 5^{-x}$
   b) $y = \dfrac{5}{x}$
   c) $y = \left(\dfrac{1}{5}\right)^x$
3. Trouve la valeur de x : $3 \cdot 3^{x-1} = \dfrac{1}{27}$
4. Trouve la(les) valeur(s) de r dans $5r^4 = 80$.
5. Combien y a-t-il de solutions à l'équation $2^{\sin x} = 8$, où $0 < x < \pi$?

Problèmes

1. Trouve la valeur de x :
   a) $\dfrac{1}{4^{x-2}} = 64$
   b) $2\,(5^{2x-9}) = 250$
2. Trouve la valeur de x : $2^{2x} = 3(2^x) - 2$.

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 4, leçon 4

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-3 définir un logarithme et transformer des expressions exponentielles en expressions logarithmiques équivalentes, et vice-versa

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **définir une fonction logarithmique**

La ***fonction logarithmique*** $y = \log_b x$ est la réciproque de la fonction exponentielle $y = b^x$, où $b \neq 1$ et $b > 0$, $x > 0$.

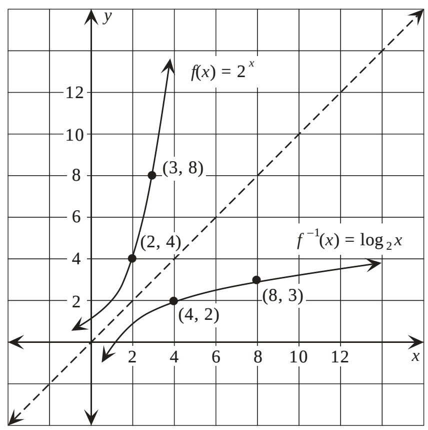
$y = \log_b x$ si et seulement si $x = b^y$

y est le ***logarithme***

b est la ***base***

x est l'***argument***

Compare les graphiques de $y = 2^x$ et de $y = \log_2 x$.



Exemple 1

a) Écris $y = 4^x$ sous forme logarithmique.

b) Écris $\log_2 8 = 3$ sous forme exponentielle.

c) Trouve $\log_2 16$, $\log_9 3$, $\log_2 \left(\frac{1}{4}\right)$

d) Pourquoi $\log_2(-4)$ n'existe-t-il pas?

Solutions

a) $\log_4 y = x$

b) $2^3 = 8$

c) $4, \frac{1}{2}, -2$

d) -4 n'appartient pas au domaine, $2^x \neq -4$

Communications ✔ **Résolution**
Liens ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental ✔ **Technologie**
Visualisation

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul mental

Exprime sous forme exponentielle : $\log_6\left(\frac{1}{6}\right) = -1$

Inscription au journal

Explique pourquoi $\log_a 0$ n'est pas défini. Utilise des phrases complètes.

Problèmes

1. Évalue $\log_{12} (\log_9 (\log_5 (\log_2 32)))$.
2. Évalue $\log (\cos k\pi)$, où k est un entier impair.

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
–Module 4, leçon 3

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

D-3 définir un logarithme et transformer des expressions exponentielles en expressions logarithmiques équivalentes, et vice-versa – *suite*

Communications	✔ **Résolution**
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	Visualisation

• **définir une fonction logarithmique (suite)**

Exemple 2

Évalue $7^{\log_7 3}$

Solution

3

D-4 tracer et analyser les graphiques de fonctions logarithmiques

Communications	Résolution
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	✔ **Visualisation**

• **tracer les graphiques de fonctions logarithmiques**

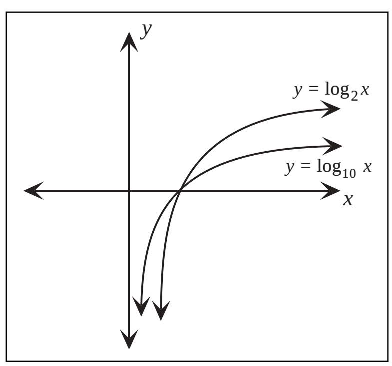
Les élèves peuvent commencer par tracer le graphique de la fonction exponentielle, puis sa réflexion par rapport à la droite $y = x$ pour obtenir le graphique de la fonction logarithmique requis.

Demandez aux élèves de tracer le graphique de $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$ et $y = \log_{10} x$, par exemple, dans le même système d'axes.

Exemple 1

Trace le graphique de $y = \log_{10} x$ et de $y = \log_2 x$ dans le même système d'axes. Quelle sera la position la plus probable du graphique de $y = \log_5 x$ sur le même système d'axes?

Solution



$y = \log_5 x$ se trouvera probablement entre les deux graphiques.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Calcul mental

1. Trouve la valeur de $\log_{10} 0{,}0001$.
2. Trouve la valeur de x : $\log_{10} x = 2$.
3. Exprime $\log_a b = x$ sous forme exponentielle.
4. Exprime $5^x = 74$ sous forme logarithmique.

Problèmes

1. Soit $\log_{2B} T = m$; trouve la valeur de B et laisse ta réponse en forme exponentielle.
2. Trouve une expression correspondant à $\log_{10} x$ si $= \dfrac{\sqrt[4]{ab}}{c}$.
3. Trouve une expression équivalente à $\dfrac{1}{2}\log_a 9 - \log_a 3$.

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
–Module 4, leçon 3

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-4 tracer et analyser les graphiques de fonctions logarithmiques
– suite

Communications | Résolution
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **tracer le graphique de fonctions logarithmiques (suite)**

Exemple 2

Analyse le graphique de $y = \log_{10}(2x + 3)$. Trouve le domaine, l'image, les asymptotes et les coordonnées à l'origine.

Solution

Domaine : $x > \frac{-3}{2}$ ou $\left]\frac{-3}{2}, \infty\right[$

Image : $\{y \in \Re\}$ ou $]-\infty, \infty[$

Asymptote : $x = 0$

Coordonnées à l'origine : l'abscisse à l'origine = 1

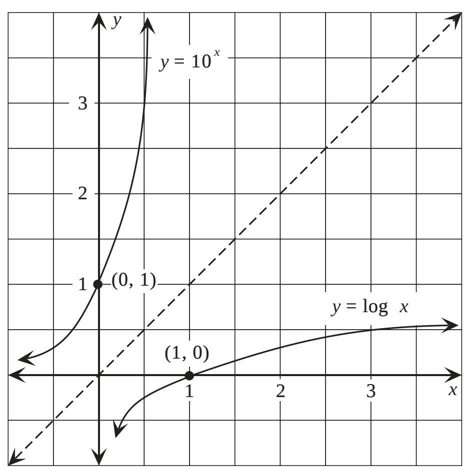
l'ordonnée à l'origine : 0,47712 ou $\log_{10}3$

• **présenter le concept du logarithme décimal (aussi appelé logarithme de Briggs ou commun) et faire le lien avec la définition de base du logarithme**

Une fonction logarithmique de base 10, $y = \log_{10} x$, est appelée une f***onction logarithmique décimale***. Si le logarithme est écrit sans base, il faut tenir pour acquis que la base est 10.

Cette fonction est désignée par la touche $\boxed{\text{LOG}}$ sur la calculatrice scientifique.

L'équation $y = \log x$ est équivalente à $x = 10^y$. Son graphique est la réflexion de $y = 10^x$ par rapport à la droite $y = x$.



– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Trace le graphique des fonctions logarithmiques suivantes :
   a) $y = |\log x|$
   b) $f(x) = \log_4 |x|$
   c) $y = \log(x + 1) - 2$

2. Sur le même système d'axes, trace le graphique de $y = 2^x$ et de $y = \log_2 x$. Donne tes commentaires sur le lien entre les deux graphiques.

3. Soit $f(x) = \log_3(x - 2)$; trouve une expression de $f^{-1}(x)$.

4. Trace le graphique de $y = \dfrac{1}{\log x}$.

5. Trace le graphique de $y = -\log_2(x - 3)$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-4 tracer et analyser les graphiques de fonctions logarithmiques
– suite

Communications | Résolution
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
✔ **Visualisation**

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **présenter le concept du logarithme décimal (aussi appelé logarithme de Briggs ou commun) et établir le lien avec la définition de base du logarithme (suite)**

Exemple

Trouve log 2.

Solution

log 2 = 0,30103 (ce qui signifie $10^{0,30103} \approx 2$)

- **déterminer les propriétés des fonctions logarithmiques de la forme $y = \log_b x$ où $b > 0$ et $b \neq 1$**

Une fois qu'ils auront tracé le graphique des fonctions logarithmiques, donnez aux élèves la possibilité d'étudier les propriétés suivantes :

Propriétés de $y = \log_b x$, où $b > 0$ et $b \neq 1$

1. Le domaine est constitué de tous les nombres x positifs.
2. L'image est constituée de tous les nombres y réels.
3. La fonction est croissante (la courbe monte) pour $b > 1$, et elle est décroissante (la courbe descend) pour $0 < b < 1$.
4. La courbe est ouverte vers le bas pour $b > 1$, et elle est ouverte vers le haut pour $0 < b < 1$.
5. Il s'agit d'une fonction biunivoque : si $\log_b (x_1) = \log_b (x_2)$, alors $x_1 = x_2$.
6. Le point (1, 0) appartient au graphique. Il n'y a pas d'ordonnée à l'origine.
7. L'axe des y est une asymptote verticale à la courbe dans la direction descendante pour $b > 1$, et dans la direction montante pour $0 < b < 1$.
8. $\log_b (b^x) = x$ et $b^{\log_b x} = x$.

- **tracer le graphique des transformations de fonctions logarithmiques**

Demandez aux élèves de transformer des fonctions logarithmiques telles que $y = \log_3(x - 1)$, $y = \log x + 2$, $y = \log_2 x - 2$ et $y = -\log x$.

Demandez aux élèves de trouver le domaine, l'image et l'équation des asymptotes.

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

1. Trouve la valeur de $\log_9 9^{4,2}$.
2. Pour toutes les valeurs de a, tel que $a > 0$, quelle est la valeur de $\log_a a$?
3. Pour toutes les valeurs de a, tel que $a > 0$, quelle est la valeur de $\log_a 1$?
4. Trouve la valeur de $x = 4^{\log_5 25}$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-5 simplifier et développer des expressions logarithmiques à l'aide des lois des logarithmes

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **démontrer les théorèmes des logarithmes**

La loi du produit des exposants, qui énonce que

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

est liée à la loi du produit des logarithmes, qui énonce que

$\boxed{\log_a MN = \log_a M + \log_a N}$, où $M > 0$ et $N > 0$

Preuve :

Soit $x = \log_a M$ alors $a^x = M$.

Soit $y = \log_a N$ alors $a^y = N$.

Maintenant $MN = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

Par conséquent, selon la définition des logarithmes :

$\log_a MN = x + y$

Mais $x = \log_a M$ et $y = \log_a N$, par conséquent nous obtenons

$\boxed{\log_a MN = \log_a M + \log_a N}$

La loi du quotient des exposants, qui énonce que

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

est liée à la loi du quotient des logarithmes, qui énonce que

$\boxed{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N}$ où $M > 0$ et $N > 0$

Preuve :

Soit $x = \log_a M$ alors $a^x = M$.

Soit $y = \log_a N$ alors $a^y = N$.

Maintenant $\dfrac{M}{N} = \dfrac{a^x}{a^y}$

$\dfrac{M}{N} = a^{x-y}$

Par conséquent, selon la définition des logarithmes

$\log_a \dfrac{M}{N} = x - y$

Mais $x = \log_a M$ et $y = \log_a N$, alors

$\boxed{\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N,}$ où $M > 0$ et $N > 0$

– suite

✔ **Communications**	Résolution
Liens	Raisonnement
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Calcul mental

Exprime log y – 5 log z sous la forme d'un seul logarithme.

Choix multiples

Quelle expression parmi les suivantes équivaut à $\log_2 \frac{\sqrt{x}(x-5)}{x^3}$?

a) $\frac{1}{2}\log_2 x \cdot \log_2 (x-5) \div \frac{1}{3}\log_2 x$

b) $\frac{1}{2}\log_2 x + \log_2 (x-5) - 3\log_2 x$

c) $2\log_2 x + \log_2 x - \log_2 5 - 3\log_2 x$

d) $2\log_2 x + \log_2 (x-5) - 3\log_2 x$

Inscription au journal

Explique comment la loi des exposants

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

est liée à la loi des logarithmes

$$\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N.$$

Problème

Si $\log_a 2 = 0{,}456$ et $\log_a 3 = 0{,}723$, trouve $\log_a 6$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-5 simplifier et développer des expressions logarithmiques à l'aide des lois des logarithmes
– *suite*

✔ **Communications**
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
Raisonnement
✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **démontrer les théorèmes des logarithmes (suite)**

La loi de la puissance des exposants, qui énonce que :

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

est liée à la loi de la puissance des logarithmes, qui énonce que :

$$\boxed{\log_a M^x = x \log_a M}$$

Preuve :

Soit $y = \log_a \mathrm{M}$ alors, $a^y = M$.

Élève chaque membre de la dernière équation à la puissance x, pour obtenir

$(a^y)^x = M^x$ ou $a^{yx} = M^x$

Par conséquent, selon la définition des logarithmes, $\log_a M^x = yx$, et puisque $y = \log_a M$, nous obtenons :

$$\boxed{\log_a M^x = x \log_a M}$$

Assurez-vous que les élèves comprennent bien que les logarithmes sont des exposants et que, par conséquent, les lois des exposants et les règles des logarithmes sont équivalentes.

• **utiliser les théorèmes des logarithmes pour simplifier des expressions logarithmiques**

Exemple 1

Exprime $2 \log x - \log y - \log z$ sous la forme d'un seul logarithme.

Solution

$\log x^2 - \log y - \log z$

$= \log x^2 - (\log y + \log z)$

$= \log \dfrac{x^2}{yz}$

Exemple 2

Exprime $\log_a \dfrac{A\sqrt{C}}{B^2}$ sous sa forme développée.

Solution

$$\log_a \frac{A\sqrt{C}}{B^2} = \log_a A + \frac{1}{2}\log_a C - 2\log_a B$$

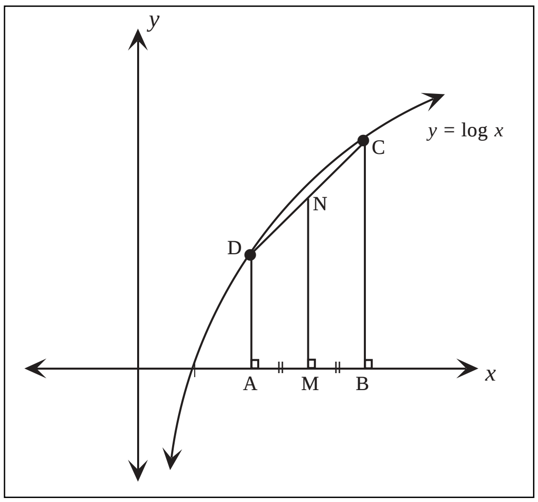
– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Dans la figure ci-dessous, les points D et C appartiennent au graphique de $y = \log_x$. Les points A(a, 0) et B(b, 0) appartiennent à l'axe des x. ABCD est un trapèze. M est le point milieu de la droite AB et N est le point milieu de la droite DC. Démontre que la longueur de MN est égale au $\log \sqrt{ab}$.



RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-5 simplifier et développer des expressions logarithmiques à l'aide des lois des logarithmes
– *suite*

✔ **Communications** | Liens | Estimation et Calcul Mental | Résolution | Raisonnement | ✔ **Technologie** | Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **utiliser les théorèmes du logarithme pour simplifier des expressions logarithmiques (suite)**

Exemple 3

Soit : $\log_a 2 = 0{,}3562$

$\log_a 3 = 0{,}5646$

$\log_a 5 = 0{,}8271$

Trouve la valeur de $\log_a \sqrt{\dfrac{10}{3}}$.

Solution

$$\log_a \sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{1}{2}[\log_a 10 - \log_a 3]$$

$$= \frac{1}{2}[\log_a 5 + \log_a 2 - \log_a 3]$$

$$\approx \frac{1}{2}[0{,}8271 + 0{,}3562 - 0{,}5646]$$

$$\approx 0{,}31$$

- **dériver la formule du changement de base**

Si la base n'est pas 10, on ne peut utiliser la touche $\boxed{\text{LOG}}$ sur la calculatrice. Il faut donc recourir à la formule de changement de base.

Le théorème du changement de base

Pour les nombres positifs a, b et n, et pour $a \neq 1$ et $b \neq 1$,

$$\boxed{\log_b n = \frac{\log_a n}{\log_a b}}$$

Preuve :

Posons $A = \log_b n$.

Selon la définition des logarithmes, $b^A = n$.

Puisque $C = D$, $\log_a C = \log_a D$, si on prend les logarithmes de chaque côté de l'équation $b^A = n$, nous obtenons $\log_a b^A = \log_a n$.

Selon la loi de la puissance, $\log_a b^A = A \times \log_a b$, et puisque $A = \log_b n$, nous obtenons $\log_b n \times \log_a b = \log_a n$.

Par conséquent, la division par $\log_a b$ nous donne le résultat :

$$\boxed{\log_b n = \frac{\log_a n}{\log_a b}}$$

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Vérifie des propriétés des logarithmes qui sont moins connues :

   a) $\log_{(b^n)} x = \frac{1}{n} \log_b x$ (logarithme avec une puissance comme base)

   b) $\log_{(b^n)} x^n = \log_b x$ (la base et l'argument sont comme des puissances)

   c) $\log_{\left(\frac{1}{b}\right)} \left(\frac{1}{x}\right) = \log_b x$ (la base et l'argument des inverses)

2. Trouve (x, y) dans le système suivant :

   $\log_9 x + \log_y 8 = 2$
   $\log_x 9 + \log_8 y = \frac{8}{3}$

3. Trouve la valeur de x : $\log_8 x + \log_{64}(x) = 1$

4. Si $\log_a M = X$ et $\log_b M = y$, démontre que $\log_{ab} M = \frac{xy}{x + y}$

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS	STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

D-5 simplifier et développer des expressions logarithmiques à l'aide des lois des logarithmes
– suite

✔ **Communications** Liens Estimation et Calcul Mental Résolution Raisonnement ✔ **Technologie** Visualisation

• **dériver la formule du changement de base (suite)**

Exemple

Soit $y = \log_2 3$; trouve sa valeur.

Solution

Méthode 1 : Changement de base

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$$
$$\approx 1{,}58496$$

Méthode 2 : Conversion à la forme exponentielle

Pour résoudre ces problèmes, on peut convertir l'expression à la forme exponentielle en utilisant la définition du logarithme, puis trouver une base appropriée pour les logarithmes et résoudre le problème.

$$y = \log_2 3$$
$$2^y = 3$$
$$\log 2^y = \log 3$$
$$y \log 2 = \log 3$$
$$y = \frac{\log 3}{\log 2}$$
$$y \approx 1{,}58496$$

Remarque : Cette méthode vérifie la formule du changement de base dans chaque cas.

D-6 résoudre et vérifier des équations exponentielles et logarithmiques

Communications Liens Estimation et Calcul Mental Résolution ✔ **Raisonnement** Technologie Visualisation

• **résoudre des équations exponentielles**

Pour résoudre des équations exponentielles dont les bases ne sont pas communes, il faut trouver le logarithme de chaque membre à l'aide des théorèmes des logarithmes. Mettez les élèves en garde de ne pas prendre les logarithmes d'une somme ou d'une différence (p. ex., $\log (x + 3) \neq \log x + \log 3$).

Exemple 1

Trouve la valeur de x : $2(3^x) = 5$.

Solution

$$2(3)^x = 5$$
$$\log 2 + x \log 3 = \log 5$$
$$x \log 3 = \log 5 - \log 2$$
$$x = \frac{\log 5 - \log 2}{\log 3}$$
$$x \approx 0{,}834$$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Choix multiples

Pour des valeurs données de x, il est vrai que $(\log_b x)^3 = 3 \log_b x$. Ces valeurs sont :

a) 1 et b

b) 1, b, et b^3

c) 1, $b^{\sqrt{3}}$ et $b^{-\sqrt{3}}$

d) 1, b, b^3 et $b^{-\sqrt{3}}$

Problèmes

1. Trouve la valeur de x en utilisant deux méthodes différentes et arrondis ta réponse finale à 4 décimales près : $5(3^x) = 4^{x-1}$.
2. Résous l'équation quadratique suivante sans l'aide d'une calculatrice : $2^{2x} = 3(2^x) - 2$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-6 résoudre et vérifier des équations exponentielles et logarithmiques
– suite

Communications | Résolution
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | Technologie | Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **résoudre des équations exponentielles (suite)**

Exemple 2

Résous : $19^{x-5} = 3^{x+2}$

Solution

$$(x-5)\log 19 = (x+2)\log 3$$
$$x(\log 19 - \log 3) = 2\log 3 + 5\log 19$$
$$x = \frac{2\log 3 + 5\log 19}{\log 19 - \log 3} \approx 9{,}17$$

- **résoudre des équations logarithmiques**

Pour résoudre des équations logarithmiques, utilise les théorèmes des logarithmes pour mettre un logarithme simple en équation avec un nombre, puis convertis à la forme exponentielle.

Remarque : Rappelez aux élèves de vérifier les racines étrangères étant donné que les logarithmes ont des domaines restreints.

Exemple 1

Résous : $\log_2(x-2) + \log_2(x) = \log_2 3$

Solution

$$\log_2 x(x-2) = \log_2 3$$
$$x(x-2) = 3$$
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$
$$x = 3,\ x = -1$$

Cependant, les logarithmes n'étant pas définis pour les nombres négatifs,

$\therefore\ x = 3$

et ($x = -1$ est une racine étrangère et doit être exclue.)

Exemple 2

Résous l'équation logarithmique suivante :

$\log_5(3x+1) + \log_5(x-3) = 3$

Solution

Si on applique le théorème du produit des logarithmes :

$\log_5[(3x+1)(x-3)] = 3$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Démontre que $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$ pour toutes les bases a.

2. Trouve la valeur de x :
   a) $\log_{10}(x^3 - 1) - \log_{10}(x^2 + x + 1) = 1$
   b) $\log_2(x + 6) + \log_2(x - 1) = 3$
   c) $\log_6(x + 5) + \log_6(2 - x) = 1$
   d) $\log_2(\log_{81} x) = -2$
   e) $\log_3(\log_2 x) = 1$
   f) $(\log_4 x)^2 - \log_4 (x) = 0$

3. L'équation $\log a + \log b - 2 \log c = 0$ est écrite au tableau. L'enseignant te demande de trouver les valeurs entières de a, b et c qui vérifient cette équation.

   Daisy répond : « $a = 3$, $b = 12$ et $c = 6$ est une solution. » Sans utiliser une calculatrice, démontre que sa réponse est correcte.

   Marie répond : « J'ai découvert un autre ensemble de valeurs pour a, b et c quand $a = 5$. » Trouve les valeurs de b et de c qu'elle peut avoir utilisées. Trouve un autre ensemble de valeurs de b et de c qu'elle aurait pu utiliser.

   L'enseignant te demande de trouver un autre ensemble de valeurs de a, b et c qui vérifient l'équation. Trouve cet ensemble de valeurs.

   George répond : « Je crois que l'équation est vérifiée quand $a = b = c$. » Harry réplique : « On trouve des solutions quand $a = b = c$, mais l'équation n'est pas vérifiée. » Trouve cette valeur.

   Décris l'ensemble de toutes les solutions pour a, b et c.

4. Trouve les zéros de la fonction $g(x) = \log_2 x + \log_2(x - 1) - 1$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS	STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

D-6 résoudre et vérifier des équations exponentielles et logarithmiques – *suite*

Communications / Résolution / Liens / ✔ **Raisonnement** / Estimation et Calcul Mental / ✔ **Technologie** / Visualisation

• **résoudre des équations logarithmiques (suite)**

Exemple 2 – suite

Solution – suite

Convertis à la forme exponentielle :

$$3x^2 - 8x - 3 = 5^3$$
$$3x^2 - 8x - 128 = 0$$
$$(3x + 16)(x - 8) = 0$$
$$x = -\frac{16}{3} \text{ ou } x = 8$$

$-\frac{16}{3}$ doit être rejeté parce que $\log_5\left(-\frac{16}{3}-3\right)$ n'a aucun sens.

$\therefore$ la solution est $x = 8$.

D-7 utiliser le concept de la base *e* dans l'analyse de problèmes qui impliquent des fonctions exponentielles et logarithmiques

Communications / Résolution / Liens / ✔ **Raisonnement** / Estimation et Calcul Mental / ✔ **Technologie** / Visualisation

• **proposer une activité qui permet de trouver une valeur approximative de *e***

Remarque : Le concept de la base *e* des logarithmes naturels (népériens) peut être intégré aux résultats d'apprentissage liés aux logarithmes décimaux.

Dans les fonctions logarithmiques exponentielles, le plus important nombre dans la base est celui qui est exprimé par la lettre *e*. Tout comme π, il s'agit d'un nombre irrationnel dont la valeur est 2,718281828457045...

Demandez aux élèves d'utiliser un outil graphique pour trouver cette approximation.

Posons $f(n) = 1+\frac{1}{n}$ et $g(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

À l'aide de ta calculatrice, évalue les énoncés suivants :

a) $f(1)$ et $g(1)$

b) $f(10)$ et $g(10)$

c) $f(100)$ et $g(100)$

d) $f(1000)$ et $g(1000)$

e) $f(10000)$ et $g(10000)$

Les élèves devraient découvrir que, si les valeurs de *f* se rapprochent de 1 à mesure que la valeur de *n* augmente, ce n'est pas le cas des valeurs de *g*. En effet, à mesure que la valeur de *n* augmente, les valeurs de *g* se rapprochent d'un nombre représenté par *e*, qui équivaut approximativement à 2,718.

Autrement dit, les élèves découvrent la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. a) Quelle est la valeur de $e^{2ln\ 4}$?

   b) Trace les graphiques de $y = e^x$ et de $y = e^{-x}$.

   c) Trace les graphiques $y = e^{\ln x}$ et de $y = \ln e^x$. Pourquoi les graphiques sont-ils différents? Pourquoi aurais-tu pu t'attendre à ce qu'ils soient semblables?

2. Trouve la valeur de x :

   a) $\ln e^x = 3$

   b) $2^{\ln x} = 4$

   c) $\ln e^{2x + 3} - \ln e^{x - 5} = \log_2 32$

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
–Module 5 leçon 2

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-7 utiliser le concept de la base *e* dans l'analyse des problèmes qui impliquent des fonctions exponentielles et logarithmiques
– *suite*

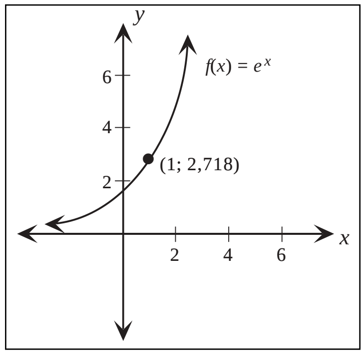
Communications
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **définir la fonction exponentielle naturelle**

  La fonction exponentielle, $f(x) = e^x$, dont la base est le nombre naturel *e*, est illustrée ci-dessous.

  La fonction $f(x) = e^x$ est appelée la fonction ***exponentielle naturelle***.

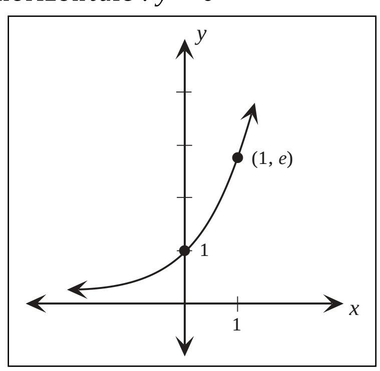


- **étudier les propriétés de la fonction exponentielle naturelle $y = e^x$**

  Présentez les propriétés suivantes aux élèves :

Propriétés de $y = e^x$

1. Domaine : $\Re$
2. Image : $y > 0$
3. Fonction croissante
4. La courbe est ouverte vers le haut
5. La fonction est biunivoque : si $e^x = e^{x2}$, alors $x_1 = x_2$
6. $0 < e^x < 1$ pour $x < 0$; $e^x > 1$ pour $x > 0$
7. $e^{\ln x} = x$ $\quad$ $*f(f^{-1}(x)) = x$
8. Asymptote horizontale : $y = 0$



STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Dans $f(x) = e^{x-h}$, l'ordonnée à l'origine est e; trouve la valeur de h.
2. Trouve $f^{-1}(x)$ si $f(x) = 10e^x$.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-7 utiliser le concept de la base e dans l'analyse des problèmes qui impliquent des fonctions exponentielles et logarithmiques
– suite

Communications	Résolution
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **tracer les graphiques des transformations des fonctions exponentielles naturelles**

Les transformations suivent le même modèle pour $y = e^x$ et pour $y = a^x$.

Exemple

Trace le graphique de chacune des fonctions exponentielles suivantes et indique le domaine, l'image, l'ordonnée à l'origine et l'équation de l'asymptote.

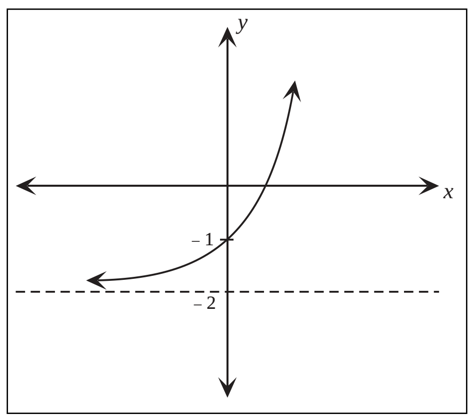
a) $y = e^x - 2$

b) $y = -e^{-x}$

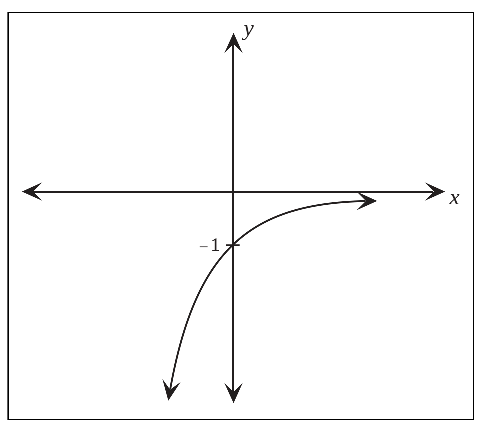
c) $y = |e^x - 1|$

Solution

a)



b)



– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-7 utiliser le concept de la base *e* dans l'analyse des problèmes qui impliquent des fonctions exponentielles et logarithmiques – *suite*

Communications | Liens | Estimation et Calcul Mental | Résolution | ✔ **Raisonnement** | ✔ **Technologie** | Visualisation

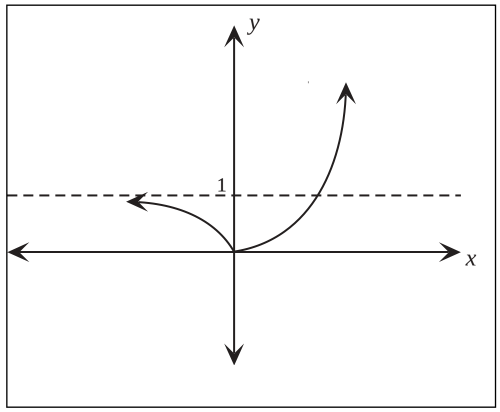
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **tracer le graphique des transformations des fonctions exponentielles naturelles (suite)**

  Exemple – suite

  Solution – suite

  c)

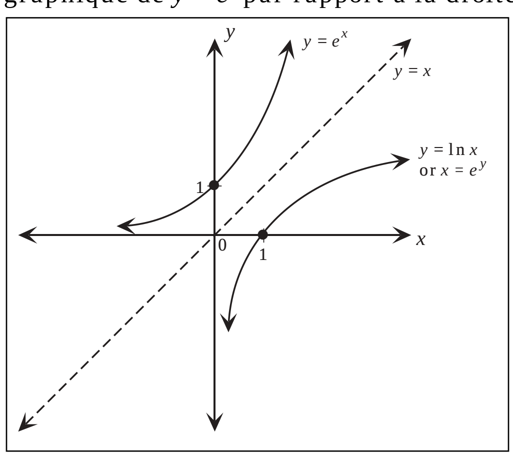


Question	Domaine	Image	Ordonnée à l'origine	Asymptote
(a)	ℜ	]–2, ∞[	–1	$y = -2$
(b)	ℜ	]–∞, 0[	–1	$y = 0$
(c)	ℜ	[0, ∞[	0	$y = 1$

- **présenter la fonction logarithmique naturelle**

  La réciproque de la fonction exponentielle $y = e^x$ est $y = \log_e x$. La fonction logarithmique naturelle est en règle générale exprimée sous la forme $y = \ln x$, où « ln » est l'abréviation de logarithme naturel.

  Ainsi, $x = e^y$ et $y = \ln x$ sont équivalents et, comme ci-dessus, on obtient le graphique de $y = \ln x$ en faisant une réflexion du graphique de $y = e^x$ par rapport à la droite $y = x$.



STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-7 utiliser le concept de la base *e* dans l'analyse des problèmes qui impliquent des fonctions exponentielles et logarithmiques
– *suite*

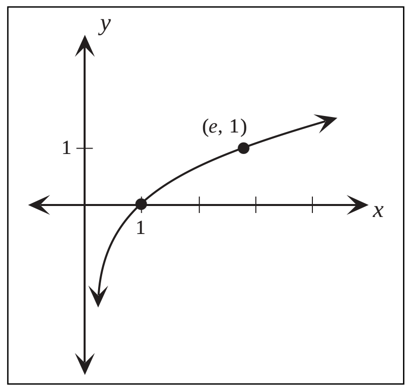
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **étudier les propriétés de $y = \ln x$**

Présentez les propriétés suivantes de $y = \ln x$.

Propriétés de $y = \ln x$

1. Domaine : $x > 0$
2. Image : $\Re$
3. Fonction croissante
4. Courbe ouverte vers le bas
5. Fonction biunivoque : si $\ln x_1 = \ln x_2$, alors $x_1 = x_2$
6. Si $x < 0$ pour $0 < x < 1$; $\ln 1 = 0$; $\ln x > 0$ pour $x > 1$
7. $\ln e^x = x$ $\quad$ $*f(f^{-1}(x)) = x$
8. Asymptote verticale : $x = 0$



- **tracer les graphiques de fonctions logarithmiques naturelles transformées**

Exemple

Trace le graphique de la fonction logarithmique suivante et indique le domaine, l'image et l'équation de l'asymptote :

a) $f(x) = \ln(-x)$

b) $h(x) = \dfrac{1}{\ln x}$

Communications	Résolution
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et	✔ **Technologie**
Calcul Mental	Visualisation

– *suite*

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-7 utiliser le concept de la base *e* dans l'analyse des problèmes qui impliquent des fonctions exponentielles et logarithmiques – *suite*

Communications
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
Visualisation

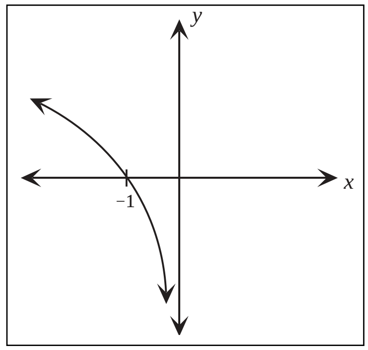
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **tracer les graphiques de fonctions logarithmiques naturelles transformées (suite)**

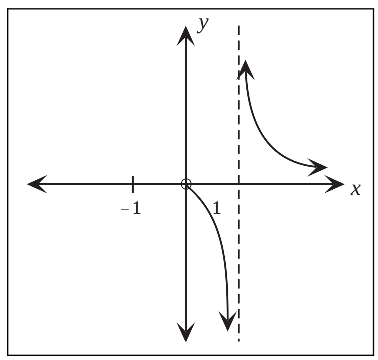
Exemple – suite

Solution – suite

a)



b)



Question	Domaine	Image	Asymptote
(a)	$]-\infty, 0[$	$\Re$	$x = 0$
(b)	$]0, 1[\cup]1, \infty[$	$\{y \mid y \neq 0\}$	$x = 1$

- **appliquer les théorèmes des logarithmes aux logarithmes naturels**

Présentez des questions sur les logarithmes naturels qui ressemblent aux questions sur les logarithmes décimaux.

Exemple 1

Développe $\ln \dfrac{x^2 y^3}{\sqrt{z}}$.

Solution

$$\ln \frac{x^2 y^3}{\sqrt{z}} = 2\ln x + 3\ln y - \frac{1}{2}\ln z$$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-7 utiliser le concept de la base *e* dans l'analyse des problèmes qui impliquent des fonctions exponentielles et logarithmiques
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **appliquer les théorèmes des logarithmes aux logarithmes naturels (suite)**

Exemple 2

Écris sous forme d'un seul logarithme :

$\ln (x - 1) + 3 \ln(x + 3) - \frac{1}{2} \ln (x^2 + 2)$

Solution

$$\ln \frac{(x-1)(x+3)^3}{\sqrt{x^2+2}}$$

Exemple 3

Utilise ta calculatrice pour trouver les logarithmes :

a) $\log_7 e$

b) ln 100

c) $\ln e^3$

Solution

a) 0,51390

b) 4,60517

c) 3

- **résoudre des équations exponentielles et logarithmiques naturelles**

Exemple 1

Trouve la valeur de x : $e^x = 2x + 1$

Solution

$x \ln e = (x + 1) \ln 2$

$x(1) = x \ln 2 + 1 \ln 2$

$x - x \ln 2 = \ln 2$

$x(1 - \ln 2) = \ln 2$

$x = \dfrac{\ln 2}{1 - \ln 2}$

Exemple 2

Trouve la valeur de t : $e^{\ln(2t-1)} = 5$

Solution

$e^{\ln(2t-1)} = 5$

$2t - 1 = 5$ (puisque $e^{\ln x} = x$, où $x = 2t - 1$)

$t = 3$

– suite

Communications	Résolution
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Choix multiples

Si $a > 1$, la plus petite valeur dans l'ensemble $\{\ln a, \log_2 a, e^a, 2^a\}$ est :

a) $\ln a$

b) $\log_2 a$

c) e^a

d) 2^a

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-7 utiliser le concept de la base *e* dans l'analyse des problèmes qui impliquent des fonctions exponentielles et logarithmiques
– *suite*

Communications | Résolution
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **résoudre des équations exponentielles et logarithmiques naturelles (suite)**

Exemple 3

Trouve la valeur de t : $e^{(2t-1)} = 5$

Solution

$e^{(2t-1)} = 5$

$2t - 1 = \ln 5$ (prends le logarithme naturel de chaque membre)

$t = \frac{1}{2}(1 + \ln 5)$

Vérifie

$e^{2[\frac{1}{2}(1+\ln 5)]-1} = e^{1+\ln 5-1} = e^{\ln 5} = 5$

Exemple 4

Trouve la valeur de x : $\ln(x + 1) = 1 + \ln x$

Solution

$\ln(x + 1) - \ln x = 1$

$\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$

$e = \frac{x+1}{x}$

$ex = x + 1$

$ex - x = 1$

$x(e - 1) = 1$

$x = \frac{1}{e-1}$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

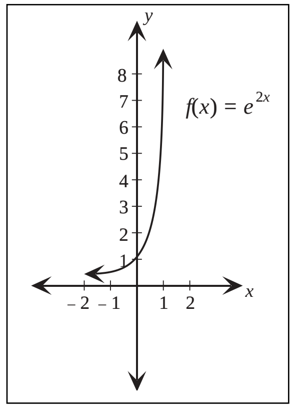
RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-8 modéliser et appliquer des fonctions exponentielles et logarithmiques

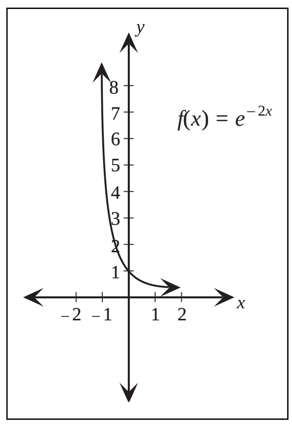
STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **examiner le modèle de la croissance et de la décroissance exponentielle**

Le graphique de $f(x) = e^{ax}$, où $a > 0$, représente une ***croissance exponentielle***, ex. $y = e^{2x}$, et il a l'apparence suivante :



Le graphique de $f(x) = e^{ax}$, où $a < 0$, représente une ***décroissance exponentielle***, ex. $y = e^{-2x}$, et il a l'apparence suivante :



Exemple 1

Une substance radioactive se désintègre selon la formule suivante :

$$y = Ae^{-0,2x}$$

où A correspond à la quantité de matière à l'origine et y à la quantité de matière résiduelle après x années.

a) Si A = 80 grammes, quelle est la quantité de matière radioactive résiduelle après 3 années?
b) Quelle est la demi-vie de cette substance?

– suite

Communications	Résolution
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	Visualisation

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

Problèmes

1. Joe a investi 50 000 $ à un taux d'intérêt annuel de 7 %, composé mensuellement. Laura a pour sa part investi 40 000 $ à un taux de 9,5 % par année, composé annuellement. Après combien d'années les deux placements auront-ils une valeur égale?

   Combien faudra-t-il de temps pour que l'investissement de Joe double?

2. Quelque 24 heures après que Sam a inhalé des vapeurs nocives, son échantillon de sang affiche une concentration de poison de 3,69 microgrammes par centimètre cube. Un deuxième échantillon de sang, prélevé 10 heures plus tard, affiche une concentration de 2,25 microgrammes par centimètre cube.

   Si le niveau de concentration est revenu à la normale 15 heures après le deuxième prélèvement, quelle était la concentration de poison à ce moment? Arrondis ta réponse à deux décimales près.

   (Considère que la diminution suit la formule $Q = Q_0e^{rt}$, où t représente le nombre d'heures écoulées depuis le premier échantillon, Q est la concentration de poison finale et Q_0 est la concentration initiale.)

3. Les ventes d'une nouvelle gamme de caméras vidéo suivent la relation suivante :

   $$V(n) = \frac{10\,000}{1 + 100e^{-n}}$$

   où $V(n)$ est le nombre total de caméras vidéo vendues durant les premières n années. Combien de temps faudra-t-il pour que 4 000 caméras vidéo aient été vendues (arrondis ta réponse à 4 décimales près).

NOTES

Ressource imprimée

Mathématiques pré-calcul Secondaire 4 : Cours destiné à l'enseignement à distance, Winnipeg, Man., Éducation et Formation professionnelle Manitoba, 2001.
– Module 5, leçon 1 et 2

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-8 modéliser et appliquer des fonctions exponentielles et logarithmiques
– suite

Communications	Résolution
Liens	✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental	✔ **Technologie**
	Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

- **examiner le modèle de la croissance et de la décroissance exponentielle (suite)**

Exemple 1 – suite

Solution

a) $y = 80e^{-0,2(3)} = 80\,(0,5488) = 43,9049$ grammes

b) $0,5 = e^{-0,2x}$

$\ln 0,5 = -0,2x \cdot \ln e$

$x = \dfrac{\ln 0,5}{-0,2}$

$= 3,4657$ années

- **étudier le concept des intérêts composés**

Développez la formule en vous fondant sur une somme d'argent investie à un taux d'intérêt donné; démontrez aux élèves pourquoi les intérêts sont composés.

Les formules utilisées dans l'évaluation des ***intérêts composés*** sont des applications de la croissance exponentielle. Si un placement de C dollars rapporte un taux d'intérêt de i % chaque année, et si les intérêts sont composés annuellement, voici la formule de l'augmentation du placement après 1 année :

$$C + Ci = C(1 + i)$$

Après une deuxième année, la valeur totale du placement est $C(1 + i)$ plus les intérêts générés par ce montant, soit $C(1 + i)i$. Par conséquent, la valeur finale du placement après deux années est :

$$C(1 + i) + C(1 + i)i = C(1 + i)(1 + i) = C(1 + i)^2$$

En règle générale, la valeur finale, VF, après t années, de C dollars investis à un taux annuel de i %, composé annuellement, est :

$$VF = C(1 + i)^t$$

Les périodes d'intérêt pour les intérêts composés sont en règle générale inférieures à une année. Si les intérêts sont composés k fois par année, et si le taux d'intérêt annuel ou nominal est i %, alors le taux d'intérêt par période est $\dfrac{i}{k}$. Par conséquent, après une année, le placement vaut :

$$VF = C\left(1+\frac{i}{k}\right)^k$$

Quand une somme de C dollars est placée pendant t années à un taux nominal de i %, composé k fois par année, le placement vaut :

$$VF = C\left(1+\frac{i}{k}\right)^{kt}$$

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Inscription au journal

Fais une recherche sur la force des tremblements de terre et compare-les en utilisant l'échelle de Richter.

Problèmes

1. Un pays a une population de 28 millions d'habitants, qui croît à un taux de 3 % par année. Si on suppose que la croissance est continue, la population P, en millions, dans t années d'ici, sera exprimée par la formule $P = 28e^{0,03t}$.

   a) Dans combien d'années la population aura-t-elle atteint 40 millions d'habitants?

   b) Quels facteurs peuvent contribuer à la rupture de ce modèle?

   c) Depuis combien d'années la population a-t-elle dépassé les 8 millions d'habitants?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-8 modéliser et appliquer des fonctions exponentielles et logarithmiques
– suite

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **étudier le concept des intérêts composés (suite)**

Exemple 1 – suite

Un montant de 5 000 $ est placé à un taux d'intérêt annuel de 8,4 %, composé mensuellement.

a) Quelle est la valeur du placement après une année?

b) Quelle est sa valeur après dix années?

c) Combien d'intérêts auront été accumulés dans dix ans?

Solution

a) $VF = 5\,000\left(1+\frac{0{,}084}{12}\right)^{12} = 5\,000\,(1{,}007)^{12} = 5\,436{,}55$ $

b) $VF = 5\,000\left(1+\frac{0{,}084}{12}\right)^{12\times 10} = 5\,000\,(1{,}007)^{120} = 11\,547{,}99$ $

c) 11 547,99 $ – 5 000 $ = 6 547,99 $

Plus le nombre de périodes d'intérêts composés augmente, plus l'expression $\left(1+\frac{i}{k}\right)^{k}$ se rapproche de e^{i}.

Remarque :

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{i}{k}\right) = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{k}{i}}\right)^{k} = \lim_{k\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{k}{i}}\right)^{\frac{k}{i}}\right)^{i} = e^{i}$$

Cela nous mène à la formule suivante pour calculer les intérêts composés de façon continue :

$$\boxed{VF = Ce^{it}}$$

Communications — Résolution
Liens — ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental — ✔ **Technologie**
Visualisation

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Un compte d'épargne rapporte des intérêts de 6 %, composés trimestriellement.
   a) Si le compte contient actuellement 5 000 $, combien d'argent contiendra-t-il dans 5 ans?
   b) Combien de temps faudra-t-il pour doubler le montant original?
2. Quel taux d'intérêt permettrait de faire passer un montant de 1 000 $ à 2 500 $ dans 8 années?
3. Quel taux d'intérêt permettrait de doubler un montant en dix ans si le taux est composé :
   a) annuellement?
   b) deux fois par année?
   c) mensuellement?
   d) hebdomadairement?
   e) quotidiennement?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-8 modéliser et appliquer des fonctions exponentielles et logarithmiques
– suite

Communications | Résolution
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **étudier le concept des intérêts composés (suite)**

Exemple 2

Quelle sera la valeur d'un placement de 5 000 $ après 10 années si le taux de 8,4 % est composé de façon continue?

Solution

$VF = 5\,000\,(e)^{0,084 \times 10} = 5\,000\,(2,316367) = 11\,581,84$ $

Remarque qu'on obtient 33,85 $ de plus que si on avait investi cette somme à un taux de 8,4 % composé mensuellement.

Étant donné que la différence entre la capitalisation quotidienne et la capitalisation à l'heure est négligeable, les institutions financières n'offrent pas les taux d'intérêt composés de façon continue. Cette formule est appliquée plutôt aux populations ou à la croissance biologique, où le cumul se fait « en continu ». Dans ces circonstances, on écrit souvent la formule comme suit :

$y_t = y_0 e^{kt}$ où : y_0 est la quantité originale
y_t est la quantité après un temps t
t est le nombre d'unités de temps écoulées
k est le taux de croissance

Cette formule est appelée la ***loi de la croissance naturelle***. Si une substance se désintègre selon la formule $y_t < y_0$, on pourrait appeler cette loi la ***loi de la décroissance naturelle***. Dans ce dernier cas, on pose $k < 0$, ou on peut considérer que la question porte sur la valeur actuelle.

Exemple 3

Actuellement, on compte 1 000 bactéries de type A. Si le taux de croissance à l'heure est de 0,025, combien devrait-on trouver de bactéries dans 24 heures?

Solution

Utilise la formule $y_t = y_0 e^{kt}$.

$y_{24} = 1000e^{0,025(24)} = 1000e^{0,6} = 1000(1,8221188) = 1822$ bactéries

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problèmes

1. Une substance radioactive se désintègre de telle sorte que la quantité actuelle équivaudra à A grammes après t années, où $Q = 50e^{-0,0135t}$. Combien de temps faudra-t-il pour que la désintégration ait atteint un stade où il ne restera plus que 10 grammes de substance radioactive?

2. Quand on a mesuré pour la première fois la croissance de la population d'une ville, on avait dénombré 22 000 habitants. On avait alors établi que la population, P, augmentait selon la formule $P = 22\,000\,(10^{0,0163t})$. Si t est mesuré en années, combien de temps faudra-t-il pour que la population de la ville double?

3. James a tenté d'augmenter la valeur de son placement en augmentant le nombre de périodes de capitalisation. Si le meilleur taux que James a pu obtenir est 6 %, est-il possible qu'il obtienne un nombre de périodes de capitalisation suffisant pour que le taux équivaille à 7 %? Explique ta réponse.

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-8 modéliser et appliquer des fonctions exponentielles et logarithmiques
– suite

Communications — Liens — Estimation et Calcul Mental — Résolution — ✔ **Raisonnement** — ✔ **Technologie** — Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **étudier le concept des intérêts composés (suite)**

Exemple 4

La désintégration d'une substance radioactive atteint un taux quotidien de 0,13. Combien de temps faudra-t-il pour que la substance soit désintégrée de moitié?

Solution

Méthode 1

(accent sur la désintégration)

$$y_t = y_0e^{-kt}$$
$$x = (2x)e^{-0,13t}$$
$$0,5 = e^{-0,13t}$$
$$\ln(0,5) = -0,13t(\ln e)$$
$$t = \frac{\ln(0,5)}{-0,13} = 5,332$$

Méthode 2

(accent sur la valeur actuelle)

$$y_t = y_0e^{kt}$$
$$2x = (x)e^{0,13t}$$
$$2 = e^{0,13t}$$
$$\ln 2 = 0,13t(\ln e)$$
$$t = \frac{\ln 2}{0,13} = 5,332$$

Il faudra environ cinq jours et un tiers pour que la substance soit désintégrée de moitié - pour que l'activité radioactive soit ***réduite à la moitié de sa valeur initiale (demi-vie)***.

Définition : La période radioactive (parfois appelée demi-vie) d'une substance correspond au temps nécessaire à la réduction de son activité à la moitié de sa valeur initiale.

Exemple 5

Quel montant d'argent dois-tu investir aujourd'hui à un taux d'intérêt de 6 % composé annuellement si tu as besoin de 5 000 $ dans 7 ans?

Solution

$$VF = C(1 + i)^n$$
$$5000 = C(1 + 0,06)^7$$
$$C = \frac{5000}{(1,06)^7} = 3325,29$$

Tu dois investir 3 325,29 $ maintenant.

Remarque : Les 3 325,29 $ représentent la valeur actualisée de 5 000 $.

– suite

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-8 modéliser et appliquer des fonctions exponentielles et logarithmiques
– *suite*

Communications | Résolution
Liens | ✔ **Raisonnement**
Estimation et Calcul Mental | ✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **étudier le concept des intérêts composés (suite)**

Exemple 6

Si tu peux investir de l'argent à un taux d'intérêt de 6 %, combien de temps faudra-t-il pour que ton investissement double?

Solution

Pour que l'argent double de valeur, x \$ doivent devenir $2x$ \$. Ainsi,

$$VF = C(1 + i)^n$$
$$2x = x\,(1 + 0{,}06)^n$$
$$2 = (1{,}06)^n$$
$$\log 2 = n \log(1{,}06)$$
$$n = \frac{\log 2}{\log(1{,}06)} \approx 11{,}9$$

Il faudra environ 11,9 années.

Souvent, les intérêts sont calculés plus d'une fois par année. Dans ces cas, le nombre de calculs augmente dans une année et les intérêts accumulés à chaque période de capitalisation diminuent.

Exemple 7

Dans un champ, on trouve 500 chiens de prairie le 31 mai. Le 20 juin, on en trouve 800. Combien y en aura-t-il le 28 juin? (La croissance est exponentielle).

Solution

$$Q = Pe^{it}$$
$$800 = 500e^{i(20)}$$
$$1{,}6 = e^{20i} \Rightarrow i = 0{,}023500181$$
$$Q = 500e^{i(28)} = 965$$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

La période radioactive du sodium-24 est de 14,9 heures. Suppose qu'un hôpital achète un échantillon de 40 mg de sodium –24.

a) Combien restera-t-il de sodium après 48 heures?

b) Combien de temps faudra-t-il avant qu'il n'en reste plus que 1 mg?

RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE PRESCRITS

D-8 modéliser et appliquer des fonctions exponentielles et logarithmiques
– *suite*

Communications
Liens
Estimation et Calcul Mental
Résolution
✔ **Raisonnement**
✔ **Technologie**
Visualisation

STRATÉGIES PÉDAGOGIQUES

• **utiliser des logarithmes pour résoudre des problèmes**

Exemple 1

L'ionisation de l'eau pure est démontrée par les équations suivantes :

$[H+]\,[OH–] = 1,0 \times 10^{-14}$ et
$[H+] = [OH–]$

Si le pH d'une solution est défini par pH = –log10 [H+], quel est le pH de l'eau pure?

Solution : 7

Exemple 2

Le tremblement de terre qui a eu lieu en Arménie avait une intensité de 6,9 sur l'échelle Richter; l'énergie produite a atteint 3,5 × 1013 J. Quelle quantité d'énergie le tremblement de terre qui a eu lieu en Alaska, dont l'intensité était de 8,2, a-t-il produit?

Solution

Échelle de Richter = logarithme de la gravité

$$8,2 = \log x$$
$$10^{8,2} = x$$
$$158489319,2 \text{ joules} = x$$

STRATÉGIES D'ÉVALUATION

NOTES

Problème

Le pH d'un acide est exprimé par la formule pH = –log 10[H+], où [H+] correspond à la concentration en ions hydrogène, exprimée en moles par litre. Quelle est la concentration en ions hydrogène d'une solution de vinaigre pauvre dont le pH = 3,1?